Résumé 21 : Intégrales à paramètres

Nous nous intéressons ici à des fonctions du type

$$F : x \in J \longmapsto \int_I f(x,t)dt,$$

où J est une partie de $\mathbb{R}$, et I un intervalle réel. L'ensemble de définition de F correspond à l'ensemble des $x \in A$ pour lesquels l'intégrale $F(x)$ converge. Les outils pour le déterminer relèvent donc du cours sur les intégrales impropres. Nous allons voir ici comment déterminer la régularité de F.

I Continuité et limite aux bornes du domaine d'une intégrale à paramètres

Puisqu'il ne s'agit que de continuité, on peut ici supposer que J est une partie d'un espace vectoriel normé.

Théorème I.1

Soit J une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie, I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $J \times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que

(i) Pour tout $t \in I, x \longmapsto f(x,t)$ est continue,

(ii) Pour tout $x \in J, t \longmapsto f(x,t)$ est continue par morceaux,

(iii) il existe une fonction φ intégrable sur I telle que pour tout $x \in A, |f(x,.)| \leqslant \varphi$.

Alors F est définie et continue sur A.

Remarques :

- La première hypothèse se retient facilement, au vu de la conclusion que l'on cherche à obtenir.
- L'hypothèse de continuité par morceaux n'a pas l'importance de l'hypothèse de domination.
- La continuité étant une notion locale, on peut affaiblir l'hypothèse de domination en remplaçant (iii) par

  (iii') pour tout compact $K \subset A, \exists \varphi_K \in \mathscr{L}^1(I)$ telle que $\forall x \in A, |f(x,.)| \leqslant \varphi_K$.

Rappelons un théorème vu dans le résumé sur la convergence dominée, qui permet de calculer la limite de F en certains points :

Théorème I.2 (Convergence dominée pour $\int_I f(x,t)dt$)

Soient I et J deux intervalles, $x_0 \in \bar{I}$, et $f : (x,t) \in J \times I \longmapsto f(x,t) \in \mathbb{C}$. Si

- *pour tout $x \in J$, $f_x : t \in I \longmapsto f(x,t)$ est continue par morceaux.*
- *pour tout $t \in I$, $\quad f(x,t) \xrightarrow[x \to x_0]{} f(t)$.*
- *il existe une fonction $\varphi \in \mathscr{C}^0_m(I,\mathbb{R})$ intégrable sur I telle que pour tout $x \in J, |f_x| \leqslant \varphi$,*

alors $\displaystyle\int_I f(x,t)\mathrm{d}t \xrightarrow[x \to x_0]{} \int_I f(t)\mathrm{d}t$.

II Dérivation d'une intégrale à paramètres

Théorème II.1

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $J \times I$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que

(i) pour tout $x \in J, t \longmapsto f(x,t)$ est intégrable sur I, (et donc continue par morceaux),

on pose alors $F : x \in J \longmapsto \displaystyle\int_I f(x,t)dt$.

(ii) pour tout $t \in I, x \longmapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur J,

(iii) pour tout $x \in J, t \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux,

(iv) il existe une fonction φ intégrable sur I telle que

$$\forall x \in J, \forall t \in I, \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t).$$

Alors, la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur J, et vérifie

$$\text{pour tout } x \in J, \qquad F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt.$$

On peut à nouveau décliner une version locale de ce théorème en remplaçant (iv) par (iv') :

(iv') pour tout segment $[a,b] \subset J$, il existe une fonction φ intégrable sur I telle que pour tout $x \in [a,b]$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,.)\right| \leqslant \varphi$.

III Classe $\mathscr{C}^k$ d'une intégrale à paramètres

Théorème III.1

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $J \times I$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que

(i) *pour tout $t \in I, x \longmapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur J,*

(ii) *pour tout $x \in J$, tout $j \in [\![0, k-1]\!], t \longmapsto \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ est intégrable sur I, (et donc continue par morceaux),*

(iii) *pour tout segment $[a,b] \subset J$, il existe une fonction φ intégrable sur I telle que*

$$\text{pour tout } x \in J, \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,.)\right| \leqslant \varphi.$$

Alors, la fonction $F : x \longmapsto \displaystyle\int_I f(x,t)dt$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur J, et vérifie

$$\text{pour tout } j \in [\![1,k]\!] \text{ et tout } x \in J, \qquad F^{(j)}(x) = \int_I \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)dt.$$

IV Rappel sur les intégrales à paramètre discret

Je redonne ici les trois théorèmes portant sur les intégrales à paramètres. Je n'ajoute pas les théorèmes portant sur les propriétés des fonctions obtenues comme somme de séries de fonctions, mais il serait utile de les revoir.

Théorème IV.1 (*Convergence dominée*)

Soit I un intervalle. Si

- *$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de I dans $\mathbb{C}$ continues par morceaux.*
- *$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction f.*
- *il existe une fonction $\varphi \in \mathscr{C}^0_m(I,\mathbb{R})$ intégrable sur I telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, |f_n| \leqslant \varphi$,*

alors $\displaystyle\int_I f_n(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f(t)\mathrm{d}t.$

Théorème IV.2 (*Interversion $\sum_{k=0}^{+\infty}$ et $\int_I$*)

Soit I un intervalle. SI

- *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux et intégrable sur I,*
- *$\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I ,*
- *la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} \int_I |f_n(t)|\mathrm{d}t$ converge,*

alors f est intégrable sur I, et $\boxed{\displaystyle\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\mathrm{d}t.}$

Si la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_I |f_n(t)|\mathrm{d}t$ diverge, mais qu'on a une estimation du reste (comme dans le cas des séries géométriques ou celles de Leibniz), on peut essayer de montrer à la main que l'intégrale du reste tend vers 0.

Enfin, dans le cas où l'intervalle d'intégration est un segment, on peut aussi essayer :

Théorème IV.3 (*Intégration d'une limite uniforme sur un segment*)

Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ dans F. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers f. Alors,

$$\int_a^b f_n(t)dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)dt.$$

V Figures imposées

Exercices :

CCP 50

Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{x+t}dt.$

1. Prouver que F est définie et continue sur $]0;+\infty[$.
2. Prouver que $x \longmapsto xF(x)$ admet une limite en $+\infty$ et déterminer la valeur de cette limite.
3. Déterminer un équivalent, au voisinage de $+\infty$, de $F(x)$.

EXERCICES :

CCP 29 On pose : $\forall\, x \in]0;+\infty[$ et $\forall\, t \in]0;+\infty[$, $f(x,t) = \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$.

1. Démontrer que, $\forall\, x \in]0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0;+\infty[$.

   On pose alors, $\forall\, x \in]0;+\infty[$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$.

2. Démontrer que, $\forall\, x \in]0;+\infty[$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
3. Démontrer que Γ est de classe C^1 sur $]0;+\infty[$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

EXERCICES :

CCP 30

1. Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.
2. Démontrer que la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
3. (a) Trouver une équation différentielle linéaire (E) d'ordre 1 dont f est solution.
   (b) Résoudre (E) .